عباس روح‌الامینی
عضو خانه ریاضیات سیرجان

گاهی خاصیت‌های جالبی در عددها و عمل‌های ریاضی دیده می‌شوند؛ نظیر اینکه مثلاً ۱۵۳ با مجموع مکعبات ارقامش برابر است. یعنی: $۱۵۳=۱^۳+۵^۳+۳^۳$.

البته این خاصیت قابل تعمیم نیست. ولی به‌هر حال عددهای دیگری نیز با چنین خاصیت‌هایی پیدا می‌شوند. مثلاً:

$۳۷۱=۳^۳+۷^۳+۱^۳$ یا $۳۷۰=۳^۳+۷^۳+۰^۳$.

ولی برخی از خاصیت‌ها یا الگوهای عددی هستند که قابل تعمیم هستند و بنابراین از نظر ریاضی خیلی ارزش دارند. به عنوان نمونه به این رابطه‌های جالب نگاه کنید:

$۳^۲+۴^۲=۵^۲$ و $۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲=۱۳^۲+۱۴^۲$

من حدس می‌زنم برایتان ایجاد علاقه و انگیزه می‌کند اگر بدانید که می‌توانیم الگوی عددی بالا را تعمیم دهیم.

یعنی ۲n+۱ عدد طبیعی متوالی که مجموع مربعات n+۱تای اولی با مجموع مربعات nتای بعدی برابر باشد.

در سمت چپ علامت تساوی بزرگ‌ترین عدد را x می‌نامیم بنابراین به این شکل معادله‌سازی می‌کنیم:

$$(x-n)^۲+\ldots+(x-۲)^۲+(x-۱)^۲+x^۲$$
$$=(x+۱)^۲+(x+۲)^۲+\ldots+(x+n)^۲$$

حال معادله را به‌صورت زیر تنظیم می‌کنیم تا اتحاد مزدوج درست شود:

$$x^۲=[(x+۱)^۲-(x-۱)^۲]+[(x+۲)^۲-(x-۲)^۲]$$
$$+\ldots+[(x+n)^۲-(x-n)^۲]$$

امـا با توجه به اتحادِ $(a+b)^۲-(a-b)^۲=۴ab$ داریم:

$$x^۲=۴(۱x)+۴(۲x)+۴(۳x)+\ldots+۴(nx)$$
$$\Rightarrow x^۲=۴x(۱+۲+۳+\ldots+n)$$
$$\Rightarrow x^۲=۴x\frac{n(n+۱)}{۲}=۲xn(n+۱)$$
$$\Rightarrow x=۲n(n+۱)$$

و در نتیجه جملهٔ اول در عبارت سمت چپ تساوی چنین می‌شود:

$$x-n=۲n(n+۱)-n=n(۲n+۲-۱)=n(۲n+۱)$$

که به ازای n=۳ به‌دست می‌آید:

$۲۱^۲+۲۲^۲+۲۳^۲+۲۴^۲=۲۵^۲+۲۶^۲+۲۷^۲$

و بـه همین ترتیب با دادن مقدارهای متفاوت به n می‌توان رشته‌های عددی مشابهی را به دست آورد. مثلاً به ازای n=۴ داریم:

$۳۶^۲+۳۷^۲+۳۸^۲+۳۹^۲+۴۰^۲=۴۱^۲+۴۲^۲+۴۳^۲+۴۴^۲$

و به همین ترتیب.